



# Borne de Cramér-Rao sous contraintes pour l'estimation simultanée de paramètres aléatoires et non aléatoires

Chengfang Ren, Julien Le Kernec, Jérôme Galy, Éric Chaumette, Pascal Larzabal, Alexandre Renaux

## ► To cite this version:

Chengfang Ren, Julien Le Kernec, Jérôme Galy, Éric Chaumette, Pascal Larzabal, et al.. Borne de Cramér-Rao sous contraintes pour l'estimation simultanée de paramètres aléatoires et non aléatoires. GRETSI, Sep 2015, Lyon, France. GRETSI. <hal-01234916>

**HAL Id: hal-01234916**

**<https://hal-centralesupelec.archives-ouvertes.fr/hal-01234916>**

Submitted on 27 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Borne de Cramér-Rao sous contraintes pour l'estimation simultanée de paramètres aléatoires et non aléatoires

Chengfang REN<sup>1</sup>, Julien LE KERNEC<sup>2</sup>, Jérôme GALY<sup>3</sup>, Éric CHAUMETTE<sup>4</sup>, Pascal LARZABAL<sup>5</sup> et Alexandre RENAUX<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université Paris-Sud/LSS, 3, Rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>Université de Nottingham-Ningbo de Chine, 1199 Taikang east road 315100 Ningbo, People's Republic of China

<sup>3</sup>Université de Montpellier 2/LIRMM, 161 rue Ada 34392 Montpellier Cedex 5, France.

<sup>4</sup>Toulouse-ISAE/DEOS, 10 Avenue Edouard Belin, Toulouse, France.

<sup>5</sup>ENS Cachan/SATIE, 61 av. du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France.

cren@lss.supelec.fr, julien.lekernec@nottingham.edu.cn, galy@lirmm.fr  
eric.chaumette@isae.fr, pascal.larzabal@satie.ens-cachan.fr, alexandre.renaux@u-psud.fr

**Résumé** – De nombreux travaux ont déjà démontré l'utilité de la borne de Cramér-Rao déterministe sous contraintes pour l'estimation de paramètres non-aléatoires soumis à des contraintes. Cependant, certains problèmes de traitement du signal nécessitent l'introduction d'un vecteur de paramètres composé de paramètres non-aléatoires et de paramètres aléatoires de densité de probabilité *a priori* connue. Dans ce contexte, une borne de Cramér-Rao dite "hybride" a été proposée dans la littérature. Dans ce papier, nous étendons cette borne lorsque l'on rajoute des contraintes de types égalités sur les paramètres non-aléatoires. La borne proposée est ensuite comparée aux autres bornes de la littérature. Enfin, l'utilité de notre borne est illustrée à travers un problème d'estimation de fréquence doppler en Radar.

**Abstract** – In statistical signal processing, hybrid parameter estimation refers to the case where the parameters vector to estimate contains both non-random and random parameters. On the other hand, numerous works have shown the versatility of deterministic constrained Cramér-Rao bound for estimation performance analysis and design of a system of measurement. In this communication, we propose a constrained hybrid lower bound which takes into account equality constraints on deterministic parameters. The proposed bound is then compared to previous bounds of the literature. Finally, the usefulness of the proposed bound is illustrated with an application to radar Doppler estimation.

## 1 Introduction

Bien qu'il existe de nombreux algorithmes d'estimation paramétrique dans le contexte fréquentiste et dans le contexte bayésien, moins de résultats sont, à l'heure actuelle, disponible lorsque le vecteur de paramètre est composé à la fois de paramètres déterministes (non-aléatoires mais inconnus) et de paramètres aléatoires dont la densité de probabilité (ddp) *a priori* est connue. Dans la littérature Anglo-Saxonne, ce contexte est appelé estimation hybride. Il faut noter que les techniques hybrides ne résultent pas d'une simple concaténation des techniques fréquentistes et des techniques bayésiennes. En effet, de nouveaux estimateurs doivent être mis en place. Par exemple, on ne peut pas utiliser directement un estimateur de type maximum de vraisemblance pour les paramètres déterministes et un estimateur de type maximum *a posteriori* pour les paramètres aléatoires puisqu'il peut exister un lien statistique entre les paramètres. De même, les méthodes d'analyses de performances de tels estimateurs doivent être modifiées de manière appropriée. On parle alors de bornes inférieures de l'erreur quadratique moyenne (EQM) hybrides.

Dans ce contexte, la communauté du traitement du signal utilise généralement la borne de Cramér-Rao hybride (BCRH) [1] pour laquelle certains résultats de convergences asymptotiques ont été récemment établis [2]. La BCRH, au même titre que la borne de Cramér-Rao classique est connue pour être simple à obtenir dans nombreux cas (voir la partie III de [3])

mais souffre de quelques inconvénients. En effet, ces bornes sont seulement précises de manières asymptotiques, c'est-à-dire en termes de nombre d'observation et/ou de rapport signal sur bruit (RSB). Mais elles ne peuvent pas prédire le phénomène de décrochement des estimateurs lors de problèmes d'estimations non-linéaire [4]. Pour résoudre ce type de problèmes on utilise d'autre type de bornes inférieures hybrides de l'EQM tels que la borne de Barankin hybride [5], la borne de Weiss-Weinstein/Barankin hybride [6] ou la borne de Ziv-Zakai/Barankin hybride [7]. Néanmoins, le coût computationnel de ces dernières reste plus élevé que celui de la BCRH, notamment lorsque le nombre de paramètres à estimer augmente. C'est pourquoi la BCRH reste un outil très apprécié dans la littérature. On peut citer, par exemple, la calibration d'un réseau d'antenne [1], l'estimation de temps de retard en traitement radar [5], l'estimation du paramètre de phase lors d'une transmission PSK binaire dans un contexte non-entraîné [8], l'estimation de direction d'arrivée pour une antenne déformée dans un contexte de mécanique des fluides [9].

Comme mentionné dans le fameux papier de Gorman et Hero [10], la borne de Cramér-Rao classique a été établie sous l'hypothèse implicite que l'espace des paramètres est un sous-ensemble d'ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Cependant, dans plusieurs applications, le vecteur de paramètres à estimer est contraint à vivre dans un espace qui n'est pas un simple sous-ensemble d'ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . C'est pourquoi, des travaux (par exemple [11]) ont été proposés pour étendre les résultats présentés dans [10]. Ces bornes

de Cramér-Rao "sous contraintes", qui prennent en compte des contraintes, se sont révélées plus pertinentes pour l'étude des problèmes susmentionnés.

Le but de ce papier est donc de proposer une borne de Cramér-Rao hybride qui prend en compte de possibles contraintes de type égalité entre les paramètres non-aléatoires. Une expression générale de cette borne est donnée pour l'estimation de paramètres vectoriels. Et enfin, nous illustrons les propriétés de cette nouvelle borne en la comparant aux autres bornes de la littérature dans un contexte d'estimation de fréquence doppler en Radar

## 1.1 Borne de Cramér-Rao hybride sous contrainte

### 1.1.1 Contexte de l'étude et notations

Nous introduisons d'abord le contexte général d'estimation dans lequel la borne de Cramér-Rao sous contraintes est utile. Considérons un vecteur d'observation  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Soient  $\boldsymbol{\theta}_d \in \Pi_d \subseteq \mathbb{R}^D$  un vecteur de paramètres inconnus et non-aléatoires et  $\boldsymbol{\theta}_r \in \Pi_r \subseteq \mathbb{R}^R$  un vecteur de paramètres inconnus et aléatoires de densité de probabilité *a priori*  $f_{\boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d}$  connue. On appellera  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_d^T \boldsymbol{\theta}_r^T]^T$  le vecteur de paramètres complet à estimer de dimension  $D + R$ . Notons  $f_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d}(\cdot) = f_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}}(\cdot)$  la densité jointe des observations  $\mathbf{x}$  et des paramètres aléatoires  $\boldsymbol{\theta}_r$  éventuellement paramétrée par  $\boldsymbol{\theta}_d$ . Les paramètres non-aléatoires  $\boldsymbol{\theta}_d$  sont contraints dans un sous espace  $\mathcal{C}$  non vide de  $\Pi_d$  défini par  $K < D$  contraintes d'égalités non redondantes :

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{\theta}_d \in \Pi_d | \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_d) = \mathbf{0}\}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_d)$  est un vecteur composé de  $K$  fonctions dérivables sur  $\Pi_d$ . Notons  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_d)$  une matrice  $K \times (D + R)$  définie par

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_d) = \frac{d\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_d)}{d\boldsymbol{\theta}^T} = \left[ \frac{d\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_d)}{d\boldsymbol{\theta}_d^T} \quad \frac{d\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_d)}{d\boldsymbol{\theta}_r^T} \right] = [\mathbf{C}_d(\boldsymbol{\theta}_d) \quad \mathbf{0}], \quad (2)$$

où  $\mathbf{C}_d(\boldsymbol{\theta}_d)$  est une matrice de dimension  $K \times D$ . Puisque les contraintes ne sont pas redondantes, le rang de la matrice  $\mathbf{C}_d(\boldsymbol{\theta}_d)$  est de  $K$  pour tout  $\boldsymbol{\theta}_d \in \mathcal{C}$ . Par conséquent, il existe une matrice  $\mathbf{U}_d(\boldsymbol{\theta}_d)$  de dimension  $K \times (D - K)$  tel que

$$\mathbf{C}_d(\boldsymbol{\theta}_d) \mathbf{U}_d(\boldsymbol{\theta}_d) = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{U}_d^T(\boldsymbol{\theta}_d) \mathbf{U}_d(\boldsymbol{\theta}_d) = \mathbf{I}_{D-K}, \quad (3)$$

où  $\mathbf{I}_{D-K}$  est une matrice identité de dimension  $D - K$ . Par ailleurs, si les équations (3) sont vérifiées, alors la matrice étendue  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_d) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_d(\boldsymbol{\theta}_d) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_R \end{bmatrix}$  satisfait les relations suivantes

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_d) \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_d) = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{U}^T(\boldsymbol{\theta}_d) \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_d) = \mathbf{I}_{D+R-K}.$$

Notons que les vecteurs colonnes de  $\mathbf{U}_d(\boldsymbol{\theta}_d)$  forment une base du noyau de  $\mathbf{C}_d(\boldsymbol{\theta}_d)$  et que les vecteurs colonnes de  $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_d)$  forment une base du noyau de  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_d)$ . Si nous avions voulu imposer des contraintes sur les paramètres aléatoires, c'est-à-dire  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_d, \boldsymbol{\theta}_r) = \mathbf{0}$ , alors la matrice  $\mathbf{U}$  dépendrait de  $\boldsymbol{\theta}_r$  conduisant à une borne qui dépendrait des estimées de  $\boldsymbol{\theta}_r$  (voir section 1.1.2 pour les détails). Il faudrait donc utiliser des techniques de type Monte-Carlo (coûteuses) pour obtenir la borne.

### 1.1.2 Borne proposée

Soit  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$  un estimateur de  $\boldsymbol{\theta}$ . Les conditions d'applicabilité de notre borne nécessitent que l'estimateur soit non-biaisé, comme pour la borne de Cramér-Rao classique [1][12] c'est-à-dire que :

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} [\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}] = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Tout estimateur non biaisé satisfait la relation suivante :  $\forall 1 \leq i \leq D + R$ , nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^R} \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial}{\partial \theta_i} f_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\theta}_r \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_d; \boldsymbol{\theta}_r} [\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}] + \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_d; \boldsymbol{\theta}_r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}) \right] \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (5)$$

où  $\theta_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\mathbf{e}_i$  est un vecteur dont tout les éléments sont nuls sauf le  $i^{\text{ème}}$  qui vaut 1. Ceci est équivalent, sous forme matricielle, à

$$\int_{\mathbb{R}^R} \int_{\Omega} (\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}) \mathbf{v}^T(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d) d\mathbf{x} d\boldsymbol{\theta}_r = \mathbf{I}_{D+R}, \quad (6)$$

avec  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d) = \frac{\partial \ln f_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T}$ .

Dans la suite, pour simplifier les notations, on notera  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d)$  et  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}_d)$ . Pour toute matrice carrée  $\mathbf{M}$  :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} \left[ (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{v}) (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{v})^T \right] = \\ & \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} [\tilde{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T] + \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T] \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{M}^T \\ & - \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} [\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{v}^T] - \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} [\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{v}^T] \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{M}^T. \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} \left[ (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{v}) (\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{v})^T \right]$  est une matrice définie non négative, et puisque  $\mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} [\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{v}^T] = \mathbf{I}_{D+R}$  d'après (6), nous obtenons

$$\mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} [\tilde{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T] \succeq \begin{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{U}^T + \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{M}^T \\ -\mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T] \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{M}^T \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Puisque cette inégalité est vérifiée pour tout  $\mathbf{M}$ , la borne la plus précise est obtenue, sous condition d'existence, en maximisant le membre de droite de (7) par rapport à la matrice  $\mathbf{M}$ . On appellera **BCRHC** la borne ainsi obtenue. Remarquons que la matrice  $\mathbf{U}^T \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T] \mathbf{U}$  est symétrique, définie positive, donc elle est diagonalisable. Il existe une matrice diagonale  $\mathbf{D}$  et une matrice orthogonale  $\mathbf{Q}$  tel que  $\mathbf{U}^T \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_r; \boldsymbol{\theta}_d} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T] \mathbf{U} = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T$ . Par conséquent, la **BCRHC** est égale à :

$$\begin{aligned} \text{BCRHC} = & \max_{\mathbf{M}} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{U} \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{U}^T - \\ (\mathbf{U} \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{Q}) \mathbf{D} (\mathbf{U} \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{M} \mathbf{U} \mathbf{Q})^T \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Nous avons une différence de deux matrices définies non négatives. Puisque le premier terme  $\mathbf{U} \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{U}^T$  ne dépend pas

de  $\mathbf{M}$ , le maximum est atteint en minimisant le second terme. Le minimum  $\mathbf{M}_{\min}$  est atteint lorsque

$$\mathbf{M}_{\min} \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{Q}^T = \mathbf{U} (\mathbf{U}^T \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \theta_r; \theta_d} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T] \mathbf{U})^{-1}. \quad (9)$$

Finalement, en injectant (9) dans (8), nous obtenons la borne proposée

$$\mathbf{BCRHC} = \mathbf{U} (\mathbf{U}^T \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \theta_r; \theta_d} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T] \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T. \quad (10)$$

Remarques :

- En général, il n'est pas nécessaire que la matrice d'information de Fisher  $\mathbb{E}_{\mathbf{x}, \theta_r; \theta_d} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T]$  soit inversible mais seulement que la matrice  $\mathbf{U}^T \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \theta_r; \theta_d} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T] \mathbf{U}$  le soit. Cette condition est également nécessaire pour la borne de Cramér-Rao déterministe sous contraintes [13].

- Si la matrice  $\mathbf{U}$  dépend de  $\theta_r$  alors  $\mathbb{E}_{\mathbf{x}, \theta_r; \theta_d} [\tilde{\theta} \mathbf{v}^T \mathbf{U}] \neq \mathbf{U}$  donc il serait toujours possible de définir une borne, mais celle-ci dépendrait de  $\tilde{\theta}$  dont il faudrait connaître une expression explicite ce qui n'est pas le cas pour des problèmes d'estimation non linéaires.

## 1.2 Comparaison avec la bornes de Cramér-Rao sans contraintes

La BCRH sans contraintes est donnée par (voir [1][12]) :

$$\mathbf{BCRH} = \mathbf{F}^{-1} = \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \theta_r; \theta_d}^{-1} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T], \quad (11)$$

où  $\mathbf{F} = \mathbb{E}_{\mathbf{x}, \theta_r; \theta_d} [\mathbf{v} \mathbf{v}^T]$  est la matrice d'information de Fisher hybride. La BCRH est un cas particulier de la BCRHC proposée ci-dessus lorsque  $K = 0$  (ce qui implique  $\mathbf{U} = \mathbf{I}_{D+R}$ ). Dans les autres cas, la BCRH et la BCRHC sont évidemment différentes. Cependant, une comparaison entre ces deux bornes est possible lorsque la matrice  $\mathbf{F}$  est inversible (sinon la BCRH n'existe pas). Comme  $\mathbf{F}$  est symétrique définie positive, il existe une matrice symétrique inversible  $\mathbf{F}^{\frac{1}{2}}$  tel que  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}^{\frac{1}{2}}$ . Donc la BCRHC peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{BCRHC} &= \mathbf{F}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} (\mathbf{U}^T \mathbf{F}^{\frac{T}{2}} \mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{\frac{T}{2}} \mathbf{F}^{-\frac{T}{2}} \\ &= \mathbf{F}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_{\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}} \mathbf{F}^{-\frac{T}{2}} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{P}_{\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}} = \mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \left( (\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U})^T \mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \right)^{-1} (\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U})^T$  est une matrice de projection orthogonal sur l'espace engendré par les vecteurs colonnes de  $\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}$ . Si on note  $\mathbf{P}_{\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}}^{\perp}$  la matrice de projection sur l'espace orthogonal à  $\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}$ , alors nous obtenons  $\mathbf{P}_{\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}} + \mathbf{P}_{\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}}^{\perp} = \mathbf{I}$  impliquant :

$$\begin{aligned} \mathbf{BCRHC} &= \mathbf{F}^{-\frac{1}{2}} \left( \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}} \right) \mathbf{F}^{-\frac{T}{2}} \\ &= \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_{\mathbf{F}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}}^{\perp} \mathbf{F}^{-\frac{T}{2}} \preceq \mathbf{F}^{-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent  $\mathbf{BCRHC} \preceq \mathbf{BCRH}$ . Ce résultat est logique puisque les contraintes peuvent être interprétées comme des informations supplémentaires permettant de mieux estimer les paramètres d'intérêts. Il a été montré dans [14] que les algorithmes d'estimation qui incluent les contraintes sur les paramètres présentent une EQM en dessous de la borne de Cramér-Rao classique.

## 2 Application à l'estimation de fréquence Doppler

Considérons un système radar actif recevant des echos atténués, retardés et déviés en fréquence d'un signal complexe connue à l'émission  $e_T(t) e^{j2\pi f_c t}$  où  $f_c$  est la fréquence porteuse et  $e_T(t)$  est l'enveloppe du signal émis. Les antennes reçoivent un train d'impulsion (burst) composé de  $L$  impulsions et l'intervalle de répétition des impulsions est noté  $T$ . Chaque impulsion dure  $T_0$ , possède une bande passante  $B$  et est réfléchiée par une cible en mouvement "lent" par rapport à  $e_T(t)$ , c'est-à-dire que  $|2v(L-1)T| \ll \frac{c}{B}$  (voir [15]) et  $\frac{2v}{c} T_0 f_c \ll 1$  (effet Doppler négligeable sur  $e_T(t)$ ), où  $c$  est la vitesse de la lumière et  $v$  est la vitesse de la cible. Sous les hypothèses standards d'un bruit temporellement blanc (bruit thermique) de puissance  $\sigma_n^2$  et qu'il n'y a pas de fluctuation de cible durant l'émission du train d'impulsion, un modèle simplifié pour la  $l^{\text{ème}}$  impulsion,  $1 \leq l \leq L$ , est donné par [15] :

$$x_l(t) = e_T(t - \tau) \alpha_l + b_l(t), \quad \alpha_l = \alpha e^{j2\pi f(l-1)}, \quad (12)$$

où  $f = -2f_c \frac{v}{c} T$ ,  $-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}$ , est la fréquence doppler normalisée et  $\alpha$  représente l'atténuation complexe du signal. Par souci de simplicité, nous supposons que la distance entre le radar et la cible est connue. Donc le signal en sortie du filtre adapté est donné par

$$y_l = s e^{j2\pi f(l-1)} + n_l, \quad s = \sqrt{BT_0} \alpha = r + jq. \quad (13)$$

Le vecteur de paramètres inconnus à estimer est  $\theta = [r \ q \ f]^T$  où le vecteur  $[r \ q]^T$  est supposé non aléatoire,  $f$  est un paramètre aléatoire de densité de probabilité *a priori* gaussienne  $\mathcal{N}(f_0, \sigma_f^2)$  et le bruit  $b_l$  est supposé gaussien complexe circulaire  $b_l \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$ . De plus les variables aléatoires  $f$  et  $b_l$  sont supposées indépendantes. Ce scénario correspond à un radar multifonction qui est entré en mode poursuite après avoir détecté une cible en mode surveillance. Les paramètres  $|s|^2$  et  $f_0$ , ont été préalablement estimés en mode surveillance. Cependant, la vitesse radiale peut varier légèrement durant le temps de basculement en mode poursuite. C'est pourquoi nous modélisons la fréquence doppler  $f$  par une variable aléatoire avec une densité de probabilité *a priori* centré en  $f_0$ . L'étude que nous allons mener est de savoir si l'accès à la puissance du signal reçu  $|s|^2$  permettant d'établir la contrainte  $r^2 + q^2 = |s|^2$  nous aide ou pas à mieux estimer la fréquence doppler  $f$ . Pour cela, il suffit de comparer la BCRHC et la BCRH. En utilisant (11), la BCRH classique est donnée par :

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{2L}{\sigma_n^2} & 0 & \frac{2\pi q L(1-L)}{\sigma_n^2} \\ 0 & \frac{2L}{\sigma_n^2} & \frac{2\pi r L(L-1)}{\sigma_n^2} \\ \frac{2\pi q L(1-L)}{\sigma_n^2} & \frac{2\pi r L(L-1)}{\sigma_n^2} & \frac{4\pi^2(r^2+q^2)L(L-1)(2L-1)}{3\sigma_n^2} + \frac{1}{\sigma_f^2 T^2} \end{array} \right)^{-1}. \quad (14)$$

La BCRHC est obtenue en utilisant la relation (10) et en dérivant la matrice unitaire  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{q}{|s|} & \frac{-r}{|s|} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ . Pour valider

notre étude, nous comparons la BCRHC et la BCRH à l'EQM du Maximum A Posteriori/Maximum de Vraisemblance classique (MAPMV) définie par :

$$(\hat{r}, \hat{q}, \hat{f}) = \arg \max_{(r, q) \in \mathbb{R}^2, f \in [-0.5; 0.5]} f_{y, f; r, q}(y, f; r, q), \quad (15)$$

et à l'EQM du MAPMV sous Contrainte (MAPMVC) qui consiste à restreindre  $(r, q)$  dans  $\mathcal{S} = \{(r, q) | r^2 + q^2 = |s|^2\}$ . Les paramètres de simulation sont les suivants :  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $|s|^2 = 0.8$ ,  $f = 0.25$ ,  $\sigma_f = 0.05$  et  $L = 32$ . Les EQMs empiriques du MAPMV et MAPMVC sont obtenues par 5000 simulations de type Monte-Carlo et avec un pas pour l'estimation de la fréquence de  $\delta f = 2^{-18}$ . Dans la figure (1), les EQM empiriques totales du MAPMV et du MAPMVC sont comparées avec la trace de la BCRH et de la BCRHC. On peut noter que l'EQM du MAPMVC est bien en dessous de la BCRH tandis que la BCRHC le prédit parfaitement à fort RSB. Dans la figure (2), les performances du MAPMV et du MAPMVC sont comparées aux BCRH et BCRHC pour l'estimation de la fréquence doppler  $f$ . Puisque la BCRH et la BCRHC coïncident, l'estimation de  $f$  est donc indépendante de la contrainte sur la puissance du signal. Ce résultat est confirmé par les comportements asymptotiques du MAPMV et du MAPMVC qui exhibent exactement les mêmes erreurs avec ou sans la contrainte sur la puissance. C'est une extension de la propriété bien connu du problème d'estimation de fréquence non-aléatoire [4] au cas où la fréquence est aléatoire.

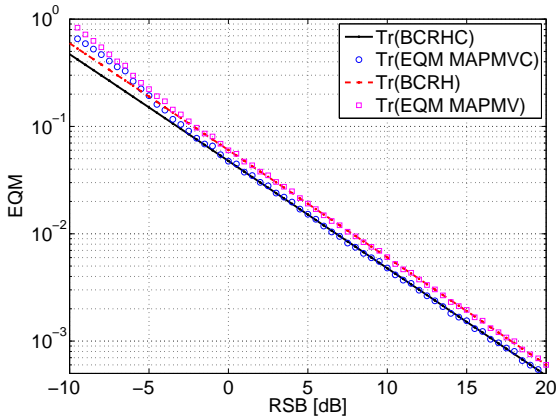


FIGURE 1 – Comparaison des EQMs empiriques totales du MAPMV et du MAPMVC aux bornes BCRH et BCRHC en fonction du RSB

### 3 Conclusion

Dans ce papier, une borne hybride sous contrainte, appelé la BCRHC, a été proposée pour prendre en compte les contraintes d'égalité existant entre les paramètres non-aléatoires. La BCRHC est à la fois une borne pertinente pour prédire le comportement asymptotique des estimateurs sous contraintes mais également un outil utile pour analyser les performances d'estimation et pour établir un système de mesure impliquant des paramètres aléatoires.

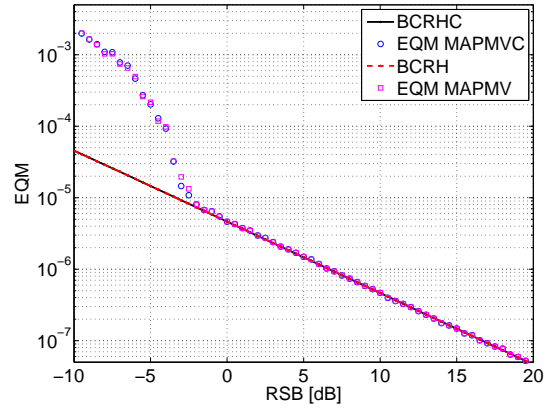


FIGURE 2 – Comparaison des EQMs et des bornes pour l'estimation de la fréquence Doppler en fonction du RSB

### Références

- [1] Y. Rockah and P. Schultheiss, "Array shape calibration using sources in unknown locations—part I : Far-field sources," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 35, no. 3, pp. 286–299, Mar. 1987.
- [2] Y. Noam and H. Messer, "Notes on the tightness of the hybrid Cramér-Rao lower bound," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 6, pp. 2074–2084, 2009.
- [3] H. L. Van Trees and K. L. Bell, Eds., *Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering/Tracking*. New-York, NY, USA : Wiley/IEEE Press, Sep. 2007.
- [4] D. C. Rife and R. R. Boorstyn, "Single tone parameter estimation from discrete time observations," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 20, no. 5, pp. 591–598, Sep. 1974.
- [5] I. Reuven and H. Messer, "A Barankin-type lower bound on the estimation error of a hybrid parameter vector," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 43, no. 3, pp. 1084–1093, May 1997.
- [6] C. Ren, J. Galy, E. Chaumette, P. Larzabal, and A. Renaux, "Hybrid lower bound on the MSE based on the barankin and weiss-weinstein bounds," in *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Vancouver, Canada, May 2013, pp. 5534–5538.
- [7] —, "A Ziv-Zakai type bound for hybrid parameter estimation," in *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Florence, Italy, May 2014, pp. 4663–4667.
- [8] S. Bay, B. Geller, A. Renaux, J.-P. Barbot, and J.-M. Brossier, "On the hybrid Cramér-Rao bound and its application to dynamical phase estimation," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 15, pp. 453–456, 2008.
- [9] P. Tichavský and K. Wong, "Quasi-fluid-mechanics based quasi-Bayesian Cramér-Rao bounds for towed-array direction finding," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 1, pp. 36–47, Jan. 2007.
- [10] J. D. Gordon and A. O. Hero, "Lower bounds for parametric estimation with constraints," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 26, no. 6, pp. 1285–1301, Nov. 1990.
- [11] T. Menni, E. Chaumette, P. Larzabal, and J. P. Barbot, "New result on Deterministic Cramér-Rao bounds for real and complex parameters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 3, pp. 1032–1049, 2012.
- [12] H. Messer, "The hybrid Cramér-Rao lower bound – from practice to theory," in *Proc. of IEEE Workshop on Sensor Array and Multi-channel Processing (SAM)*, Waltham, MA, USA, Jul. 2006, pp. 304–307.
- [13] P. Stoica and B. Chong Ng, "On the Cramér-Rao bound under parametric constraints," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 5, no. 7, pp. 177–179, 1998.
- [14] J. D. Gordon and A. O. Hero, "On the application of Cramér-Rao type lower bounds for constrained estimation," in *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Toronto, Canada, 1991.
- [15] N. Levanon and E. Mozeron, *Radar Signals*. Wiley-Interscience, 2004.